

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC**  
**CLASA a 12-a**  
**București, 13 februarie 2026**  
**SUBIECTE**

**Problema 1**

Se consideră un grup  $(G, \cdot)$  și  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow G$  morfisme de la grupul  $(\mathbb{Z}, +)$  în grupul  $(G, \cdot)$ , cu proprietatea că există două numere întregi  $a$  și  $b$ , prime între ele, astfel încât  $f(a) = g(a)$  și  $f(b) = g(b)$ . Arătați că  $f = g$ .

**Problema 2**

a) Fie  $0 \leq a < b$  și o funcție derivabilă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $\int_a^b f(x) dx = bf(a) - af(b)$ .

Arătați că există  $c \in (a, b)$  cu  $f'(c) = 0$ .

b) Dați un exemplu de funcție derivabilă  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1)$  și  $f'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in [-1, 1]$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 3**

Fie  $(M, \cdot)$  un monoid finit cu cel puțin două elemente. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $a^n \neq a$ , oricare ar fi  $a \in M$ ,  $a \neq e$ , unde  $e$  este elementul neutru al monoidului.

b)  $(M, \cdot)$  este grup.

**Problema 4**

Fie  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă pe orice interval  $[a, b] \subset [1, \infty)$  și șirul  $(a_n)_{n \geq 2}$ ,

cu  $a_n = \frac{1}{\ln n} \int_1^n \frac{f(x)}{x} dx$ . Știind că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Notă:** Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.